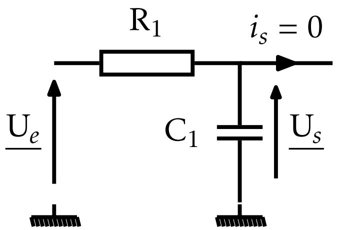
## Problème 1 : Construction de filtres

On étudie l'emploi de filtres pour transformer des signaux électriques.
**Données :** Résistance $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, capacité $C_1 = 160\,\mathrm{nF}$.

# I Circuit du premier ordre

On réalise le filtre de la figure ci-dessous.




**I.1**. Déterminer sans calcul la nature du filtre.

**I.2**. Déterminer l'expression de sa fonction de transfert $\underline{H} = \underline{U_s}/\underline{U_e}$ en régime sinusoïdal établi et identifier sa fréquence de coupure, notée $f_c$. Calculer sa valeur.

**I.3**. Tracer son diagramme de Bode en amplitude (gain en dB en fonction du logarithme du quotient $f/f_c$, avec $f$ la fréquence). On veillera à préciser les équations des asymptotes.

# II Correction de la distorsion harmonique

Un signal sinusoïdal de fréquence $f$ peut être déformé lors de la traversée de divers systèmes électroniques. En particulier, on peut voir apparaître des composantes harmoniques aux fréquences $nf$, avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On obtient alors, dans le cas d'une tension, une expression de la forme :

$$u(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} U_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \qquad (1)$$

On définit dans ce cas le « taux de distorsion harmonique de rang n », noté $TDH_n$ par la suite par :

$$TDH_n = 100 \times \frac{U_n}{U_1}. \qquad (2)$$

**II.1**. On considère un signal créneau dont le spectre de Fourier est représenté sur la figure ci-contre. Y lire les valeurs des taux de distorsion harmonique de rangs 1,3 et 5.

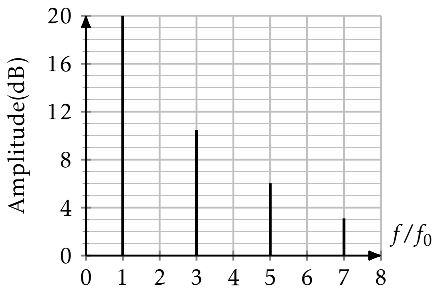



FIG. 1 : Spectre de Fourier d'un signal créneau de fréquence $f_0$.

**II.2**. Un exemple de déformation d'un signal est l'effet de « saturation » observé quand l'amplitude du signal approche la valeur maximale $U_{\max}$ que peut fournir le dispositif électronique. On considère le cas extrême où le signal initialement sinusoïdal de fréquence $f_i$ devient après déformation un créneau d'amplitude $U_{\max}$ et de même fréquence $f_i$, noté $u_k(t)$ (son spectre de Fourier est donc celui de la figure 1).

(**a**) On filtre le signal $u_k(t)$ par le circuit de la section I. Déterminer les taux de distorsion harmonique des harmoniques de rangs 3 et 5 pour $f_i = 1\,\mathrm{kHz}$.

(**b**) Même question pour l'harmonique de rang 3 pour un signal de fréquence $f_i = 5\cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$ puis pour un signal de fréquence $f_i = 2\,\mathrm{kHz}$.

(**c**) Pour lequel de ces signaux la correction de la distorsion est-elle la plus efficace ?

**II.3**. Commenter qualitativement l'utilité d'un passe-bas du premier ordre pour corriger la distorsion harmonique d'un signal complexe non nécessairement périodique comme celui d'un système audio par exemple.

**II.4**. (**a**) Utiliser le code python de l'activité pour tracer la réponse d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 200\,\mathrm{Hz}$ quand on l'applique à un signal créneau d'amplitude $U_{Cr} = 1\,\mathrm{V}$ de fréquence $f_{Cr} = 2\,\mathrm{kHz}$.

(**b**) Justifier l'allure de la fonction. Déterminer son amplitude en fonction de $U_{Cr}$, $f_c$ et $f_{Cr}$ et vérifier l'accord la courbe obtenue à la question précédente.

(**c**) Tracer la réponse du même filtre passe-bas quand on l'applique à un triangle de même amplitude et de même fréquence. On pourra utiliser la fonction `signal.sawtooth` (voir ).

# III Utilisation d'un filtre d'ordre 2

On considère dans toute la suite la correction de la distorsion harmonique d'un signal créneau comme celui du **II.1**.

On souhaite dans cette partie améliorer le filtre du I en rajoutant en sortie un autre filtre utilisant deux dipôles $X$ et $Y$ comme représenté sur la figure ci-contre.

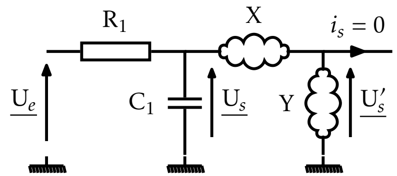



FIG. 2 : On ajoute les dipôles $X$ et $Y$ en sortie du filtre de la section I.

**III.1**. On ne dispose plus que de boîtes à décades d'inductances et de résistances et on ne souhaite pas modifier les composants du filtre du I. Déterminer où placer une bobine et une résistance (positions $X$ et $Y$) pour réaliser un passe-bas d'ordre 2. On notera respectivement $R_2$ et $L_2$ les valeurs de la résistance et de l'inductance utilisées.

**III.2**. (**a**) Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{U'_s}/\underline{U_e}$ et la mettre sous la forme suivante :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \qquad (3)$$

On précisera les expressions de $Q$ et $\omega_0$ en fonction des paramètres du circuit.

(**b**) Proposer des valeurs pour $L_2$ et $R_2$ permettant d'avoir $f_0 = \omega_0/(2\pi) = f_c$ (avec $f_c$ la fréquence définie à la section I) et $Q = 1/\sqrt{2}$. On pourra simplifier les expressions de $\omega_0$ et $Q$ en utilisant les grandeurs $x = R_2/R_1$ et $y = L_2/(R_1^2 C_1)$.

**III.3**. (**a**) Tracer l'allure du diagramme de Bode du gain pour $Q = 1/\sqrt{2}$.

(**b**) En déduire le taux de distorsion pour l'harmonique de rang 3 du signal obtenu quand ce filtre est appliqué au créneau défini à la question **II.2** pour $f_i = 1\,\mathrm{kHz}$, $f_i = 5 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$ puis pour $f_i = 2\,\mathrm{kHz}$. Commenter.

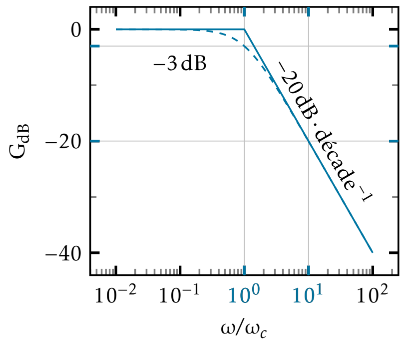
**III.4**. (**a**) On considère de nouveau le signal créneau d'amplitude $U_{Cr} = 1\,\mathrm{V}$ de fréquence $f_{Cr} = 2\,\mathrm{kHz}$ qu'on nomme $e(t)$. Proposer des paramètres $f_0$ et $Q$ pour un filtre passe-bas du 2ème ordre permettant quand on l'applique à $e(t)$ d'obtenir un signal $s(t)$ dont le fondamental et l'harmonique de rang 5 (de fréquence $5f_r$) ont des amplitudes égales.

(**b**) Utiliser le code python de l'activité pour tracer sur une même figure les signaux $e(t)$ et $s(t)$.

## Correction du problème 1

# I Circuit du premier ordre




**I.1**. Les équivalents à haute et basse fréquence du condensateur assurent qu'il s'agit d'un filtre passe-bas.

**I.2**. Comme vu en cours, on a $\underline{H} = 1/(1 + jf/f_c)$, avec $f_c = 1/(2\pi R_1 C_1) = 1{,}0\,\text{kHz}$.

**I.3**. On obtient le diagramme de Bode ci-contre.

# II Correction de la distorsion harmonique

**II.1**. On lit directement :

$$\mathrm{TDH}_1 = 1 \qquad \mathrm{TDH}_3 = 100 \times 10^{(10{,}5-20)/20} \simeq 33 \qquad \mathrm{TDH}_5 = 100 \times 10^{(6-20)/20} \simeq 20$$

**II.2**. (**a**) Le filtre multiplie l'amplitude d'une composante sinusoïdale à $\omega$ par le module de $\underline{H}(j\omega) = 1/\sqrt{1 + (f/f_c)^2}$. On peut effectuer les calculs à partir de cette expression ou utiliser le diagramme de Bode (les calculs sont alors un peu plus rapides). Notons $\mathrm{TDH}'_i$ le taux de distorsion harmonique on sortie de filtre ; on a :

$$\mathrm{TDH}'_3 = 100 \times \frac{U_{s3}}{U_{s1}} = 100 \times \frac{H(3\omega_c)}{H(\omega_c)}\mathrm{TDH}_3 \qquad \mathrm{TDH}'_5 = 100 \times \frac{U_{s5}}{U_{s1}} = 100 \times \frac{H(5\omega_c)}{H(\omega_c)}\mathrm{TDH}_5$$
$$= 14{,}9 \qquad\qquad = 5{,}5$$

(**b**) On a cette désormais :

$$\mathrm{TDH}'_3(f_i = 500\,\text{Hz}) = 100 \times \frac{H(3\omega_c/2)}{H(\omega_c/2)}\mathrm{TDH}_3 \qquad \mathrm{TDH}'_3(f_i = 2\,\text{kHz}) = 100 \times \frac{H(6\omega_c)}{H(2\omega_c)}\mathrm{TDH}_3$$
$$= 21 \qquad\qquad = 12{,}2$$

(**c**) Pour le troisième harmonique, le TDH est le plus faible quand $f_i = 2f_c$, légèrement inférieur au cas où $f_i = f_c$. Néanmoins, pour $f_i = 2f_c$, le fondamental est très coupé : on a bien un signal de meilleure pureté harmonique mais son amplitude a significativement diminué : d'autres sources de bruit risquent de le perturber. On choisira préférentiellement le cas $f_i = f_c$.

**II.3**. Un signal complexe possédera un spectre qui s'étend sur une large gamme de fréquence. Tenter de corriger par un filtre passe-bas reviendrait à couper des harmoniques initialement présentes dans le signal et donc à en modifier le timbre. On ne peut donc pas utiliser cette technique. On devra se contenter de contrôler que l'amplitude du signal après amplification reste suffisamment faible pour qu'il ne sature pas.

**II.4**. Le code nécessaire est disponible dans l'activité capytale :

(**a**) On change simplement la fréquence du signal d'entrée et mettre une amplitude de 1V.

(**b**) On obtient un signal triangulaire : en effet la fréquence du créneau est dans le domaine coupé du filtre passe-bas où il se comporte comme un filtre intégrateur. Son mode fondamental et tous ses harmoniques, de fréquences supérieures, seront donc intégrés. En effet pour $f \gg f_c$, on a : $\underline{H} \simeq 1/(j\omega/\omega_c)$.
On a donc, quels que soient les instants $t_1$ et $t_2$ :

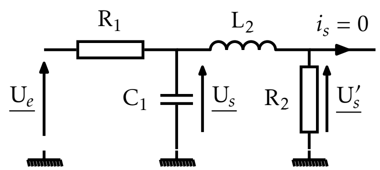
$$s(t_2) - s(t_1) = \omega_c \int_{t_1}^{t_2} e(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sur un quart de période $[0; T_{Cr}/4]$ où $u_e = U_{Cr}$, on calcule l'amplitude :

$$U_s(T_{Cr}/2) = \frac{\omega U_{Cr} T_{Cr}}{4} = \frac{\omega U_{Cr}}{4 f_{Cr}} = 1{,}57 \cdot 10^2\,\text{mV},$$

en accord avec la simulation numérique.

# III Utilisation d'un filtre d'ordre 2




**III.1**. Les modèles asymptotiques de la bobine et du condensateur assurent qu'on doit placer les dipôles comme indiqué sur le schéma ci-contre.

**III.2**. (**a**) ☠ On ne peut pas écrire la fonction de transfert comme le produit des deux fonctions de transfert des ponts en sortie ouverte puisque le premier pont $(R_1 C_2)$ n'est pas en sortie ouverte.
On exprime $\underline{Z}$ l'impédance de l'association de $C_1 // (L_2 - -R_2)$ :

$$\underline{Z} = \frac{(jL_2\omega + R_2)/(jC_1\omega)}{jL_2\omega + R_2 + 1/(jC_1\omega)} = \frac{jL_2\omega + R_2}{1 + jR_2C_1\omega - L_2C_1\omega^2}.$$

On a alors :

$$\underline{H} = \frac{\underline{U'_s}}{\underline{U_s}}\frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}.$$

Deux ponts diviseurs de tension donnent :

$$\frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_1} \quad \text{et :} \quad \frac{\underline{U'_s}}{\underline{U_s}} = \frac{R_2}{R_2 + jL_2\omega} \text{ soit (après simplifications) :}$$

$$\underline{H} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j(L_2 + R_2C_1\omega) - R_1L_2\omega^2} = \frac{R_2/(R_1+R_2)}{1 + j(L_2 + R_2C_1\omega)/(R_1+R_2) - R_1L_2\omega^2/(R_1+R_2)}.$$

Cette expression est de la forme demandée, avec :

$$H_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2} \qquad \omega_0^2 = \frac{1+R_2/R_1}{L_2C_1} \qquad \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{R_1+R_2}{L_2+R_1R_2C_1} \to Q = \frac{R_1+R_2}{L_2+R_1R_2C_1}\sqrt{\frac{L_2C_1}{1+\frac{R_2}{R_1}}}$$

(**b**) On vérifie que les expressions proposées sont sans dimension. On factorise en écrivant $R_1+R_2 = R_1(1+R_2/R_1)$ et $L_2 = L_2/(R_1^2C_1)\times(R_1^2/C_1)$. On obtient, après simplifications :

$$\omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}\sqrt{\frac{1+x}{y}} \qquad Q = \frac{\sqrt{(1+x)y}}{x+y}.$$

On veut avoir $f_0 = f_c$, soit $\omega_0 = 1/(R_1C_1)$. Il faut donc choisir $\sqrt{(1+x)/y} = 1$, soit $1+x = y$.
On doit donc résoudre le système :

$$1+x = y \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(1+x)y}}{x+y} = \frac{y}{x+y}$$

$$1+x = y \qquad y = \frac{x}{\sqrt{2}-1}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71 \qquad y = \frac{x}{\sqrt{2}-1} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}71.$$

On calcule alors :

$$R_2 = xR_1 = 707\,\Omega \qquad L_2 = R_1^2C_1y = 0{,}39\,\mathrm{H}.$$

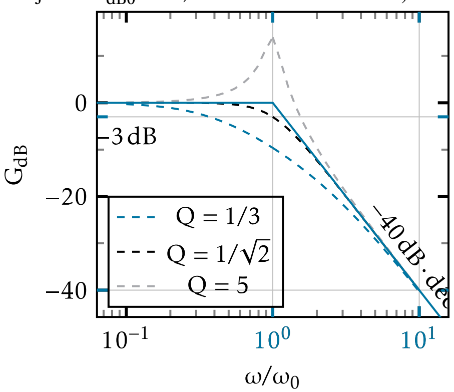
Pour ces valeurs on a aussi : $H_0 = x/(1+x) = sqrt2-1 = 0{,}41$ et $G_{\mathrm{dB0}} = 20\log(H_0) = -7{,}66$

**III.3**. (**a**) La valeur du facteur de qualité choisi est celle pour laquelle la courbe colle le plus à ses asymptotes comme on peut le voir sur la figure ci-contre (sur laquelle il faut rajouter $G_{\mathrm{dB0}} = -7{,}66$ à toutes les ordonnées).

$\omega \ll \omega_c$ **:** $G_{\mathrm{dB}} = G_{\mathrm{dB0}}$

$\omega \gg \omega_c$ **:** $G_{\mathrm{dB}} = -40\mathrm{dB/decade}$

$\omega = \omega_c$ **:** $G_{\mathrm{dB}} = G_{\mathrm{dB0}} + 20\log(Q) = -10{,}7.$




(**b**) **Pour** $f_i = f_c$**.** On lit les gains :

$$G_{\mathrm{dB}}(f_c) = G_{\mathrm{dB0}} - 3 \quad G_{\mathrm{dB}}(3f_c) \simeq G_{\mathrm{dB0}} - 40*\log(3) = G_{\mathrm{dB0}} - 19{,}1$$

On en déduit :

$$\mathrm{TDH}_3' = 100\times 10^{G_{\mathrm{dB}}(3f_c)-G_{\mathrm{dB}}(f_c)/20}\mathrm{TDH}_3 = 5{,}2$$

**Pour** $f_i = f_c/2$**.** On lit les gains :

$$G_{\mathrm{dB}}(f_c/2) = G_{\mathrm{dB0}} \quad G_{\mathrm{dB}}(3f_c/2) \simeq G_{\mathrm{dB0}} - 40*\log(3/2) \simeq G_{\mathrm{dB0}} - 7{,}0$$

On en déduit :

$$\mathrm{TDH}_3' = 100\times 10^{G_{\mathrm{dB}}(3f_c/2)-G_{\mathrm{dB}}(f_c/2)/20}\mathrm{TDH}_3 = 14{,}8$$

**Pour** $f_i = 2f_c$**.** On lit les gains :

$$G_{\mathrm{dB}}(2f_c) \simeq G_{\mathrm{dB0}} - 40\log(2) = G_{\mathrm{dB0}} - 12{,}0 \quad G_{\mathrm{dB}}(6f_c) \simeq G_{\mathrm{dB0}} - 40*\log(6) \simeq G_{\mathrm{dB0}} - 31$$

On en déduit :

$$\mathrm{TDH}_3' = 100\times 10^{G_{\mathrm{dB}}(3f_c)-G_{\mathrm{dB}}(2f_c)/20}\mathrm{TDH}_3 = 3{,}7$$

Comme on pouvait s'y attendre l'utilisation d'un filtre du deuxième ordre permet de réduire très significativement le taux de distorsion harmonique puisqu'il élimine plus efficacement dans la bande coupée.

**III.4**. Le gain d'un passe-bas du 2$^{\mathrm{e}}$ordre a pour expression :

$$H = \frac{H_0}{\sqrt{1-(\omega/\omega_0)^2+(\omega/(Q\omega_0))^2}}.$$

Il présente une résonance pour $Q > 1/\sqrt{2}$ en $\omega = \omega_0\sqrt{[1-1/(4Q^2)]}$ où il vaut $Q/\sqrt{1-1/(4Q^2)}$. Sa phase vaut par ailleurs $-\pi/2$ en $\omega = \omega_0$.

(**a**) Le spectre du signal créneau de la figure 1 montre que l'harmonique de rang 5 a une amplitude égale à $20\% = 1/5$ de celle du fondamental.

La résonance d'un passe-bas du deuxième ordre peut permettre de :

- ne pas modifier l'amplitude du fondamental s'il est dans la bande passante
- multiplier l'amplitude de l'harmonique de rang 5 par le gain $H_5 = 5$ pour la ramener à la même amplitude que celle du fondamental.

Pour $Q$ suffisamment élevé, le gain à résonance est très proche de $Q$ et la fréquence de résonance est très proche de $\omega_0$. En choisissant $Q = 5$ et $f_0 = 5f_{Cr}$ on aura bien $H_5 = 5$ pour le 5$^{\mathrm{e}}$harmonique dont la fréquence sera celle de la résonance.

(**b**) Il suffit de changer la fonction de transfert du filtre. On observe que le signal ressemble à la somme du fondamental et d'une sinusoïde de même amplitude et de fréquence quintuple déphasée de $-\pi/2$ mais que la contribution de l'harmonique de rang 3 est non négligeable comme on peut le constater sur le spectre de Fourier de la sortie.